МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из предмета

Вероватноћа и математичка статистика

на тему

Непараметарски тестови сагласности са расподелом

Ученик:
Бојана Ивић, 4d

Ментор:
др Бојана Милошевић

Београд, мај 2018.

Садржај

1 Увод

Циљ овог рада је да се објасне основе непараметарског тестирања статистичких хипотеза. Пре кратког описа из чега се састоји овај рад, желим да одговорим на питање зашто баш ова тема? У 21. веку статистика, као посебна грана примењне математике доживела је велику експанзију јер је за потребе индустрије било неопходно направити добар математички модел помоћу ког би се доносиле одлуке које би довеле до максималног прихода уз минималне трошкове.
Јако важан део процеса доношења најповољније одлуке јесу одређени статистички тестови, којима се тестирају најразличитије хипотезе као на пример да ли нови систем оцењивања доводи до бољег учинка ученика на завршним тестирањима, да ли радници неког предузећа средом долазе на посао у мањем броју од уобичајеног, да ли је новији производ исплативији од старог итд...
Тестирање хипотеза често захтева да, између осталог, одредимо коју би расподелу могла да има нека случајна величина (као што на пример знамо да се број позива Хитне помоћи током једне ноћи може моделирати Пуасоновом расподелом). Када говоримо о тестирању хипотеза оно може бити параметарско и непараметарско. Угрубо говорећи непараметарски тестови се односе на статистичке моделе који нису довољно одређени, док се параметарски тестови односе на статистичке моделе који су одређени до на параметре. Оно чиме ћемо се првенствено бавити у овом раду јесу непарметарски тестови сагласности са расподелом, односно тестираћемо, на основу датог узорка, коју би расподелу могла да има нека случајна величина, али то није једини пример непараметарских тестова. Првенствено ће предмет проучавања бити тестови екпоненцијалности - описаћемо класичне тестове као и неке модерније и да их детаљно их изанализирати и покушати да одредимо колико су они заправо добри.

Уведимо за почетак неке основне појмове везане за тестирање хипотеза.
Полазна претпоствка у било ком експерименту који изводимо назива се **нулта хипотеза** и приликом њеног дефинисања неопходно је дефинисати и **алтернтивну хипотезу**, у одређеном смислу супротну нултој,коју усвајамо у случају да нулту одбацимо и обрнуто.

Основна подела статистичких тестова је на параметарске и непараметарске тестове.

Параметарски тестови су они у којима нам је унапред позната расподела неке случајне величине, а ми желимо да оценимо параметре те расподеле. Познати начини за оцењивање параметара неке расподеле су метод момената и метод максималне веродостојности али свакако постоје и други начини.
Пример Многе природне појаве као на пример висина или крвни притисак имају нормалну расподелу.Ако за обележје важи $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, знамо да је $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.Дакле параметар μ добијамо тако што га изједначимо са узорачком средином а σ^2 изједначимо са узорачком дисперзијом.

Непараметарски тестови
Као што смо већ навели, непараметарским тестовима можемо тестирати сагласност са расподелом, али и бројне друге ствари
Пример Хи-квадрат тест независности, Вилкоксонов тест симетрије, тест знакова (sign test) итд... Да би извршили неко непараметарско тестирање потребно је дефинисати три ствари:

1) НУЛТУ ХИПОТЕЗУ H_0 која може бити проста или сложена. Просте хипотезе садрже само једну претпоставку о узорку (нпр. параметар Пуасонове расподеле је 5), док сложене садрже више претпоставки о узорку (параметар припада интервалу $(2, 7)$).
   Такође, пример просте хипотезе било би тестирање да ли неко обележје има експоненцијалну расподелу са параметром 1, док би пример сложене хипотезе био да то обележје има експиненцијалу расподелу. На овом примеру је јасно да су параметарски тестови ужи појам од непараметарских.

2) ТЕСТ СТАТИСТИКУ - случајна величина (функција од узорка) на основу које треба да буде веома индикативно да ли ћемо прохватити или одбацити нулту хипотезу;

3) КРИТИЧНУ ОБЛАСТ - скуп вредности тест статистике за које одбацујемо H_0;
   Пример Нека је дат узорак случајних величина са нормалном расоделом $X_1, X_2, \dots X_n, \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и нека је нулта хипотеза да је $\mu = \mu_0$ а алтернаивна хипотеза $\mu > \mu_0$. Изаберимо да нам тест статистика буде $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$
   Размотримо прво зашто смо тест статистику изабрали баш овако и онда ће нам бити јасно како је природно да изаберемо критичну област. Уколико имамо велики узорак према закону великих бројева знамо да узорачка средина тежи очекивању било које случајне величине, а са друге стране знамо да уколико случајна величина има нормалну расподелу њено очекивање је баш параметар μ. Дакле вредности μ_0 и $\bar{X}_n$ би требало да буду блиске а како су $\sqrt{n}$ и σ констате, следи да би уколико је нулта хипотеза тачна, Z_n требало да узима мале вредности. Дакле логично је да за критичну област одаберемо $W = \{|Z_n| > c\}$, што показује да не толеришемо велике вредности Z_n.
   Ово би био пример једног једноставног параметрског теста.

2 Карактеристике тестова

Приликом прихватања или одбацивања нулте хипотезе могући исходи приказани су у табели 1:

У случају када прихватамо нетачну нулту хипотезу правимо грешку прве врсте и вероватноћу да смо је направили обележавамо са α. У случају када одбацујемо тачну нулту хиптезу правимо грешку друге врсте чију вероватноћу обележавамо са β .Показује се да је немогуће истовремено минимизирти обе грешке тако да се увек прво трудимо да минимизирамо грешку прве врсте, па тек онда ако је и колико могуће, да минимизирамо и грешку друге врсте. Зашто? Посматрајмо пример неког суђења са смртном казном у случају да је осумњичени крив; свако је невин док се не докаже супротно, тако да нам је ово нулта хипотеза. Када бисмо направили грешку прве врсте имали бисмо невиног човека који је мртав, а ако бисмо направили грешку друге врсте имали бисмо кривца на слободи. Као што ће сваки правосудни систем првенствено тежити да што мање невиних људи буде осуђено на смртну казну, тако се и ми приликом тестирања трудимо да што више можемо умањимо вероватноћу да смо направили

Исходи тестирања и вероватноће		
	Тестирањем се H_0 прихвата	Тестирањем се H_0 одбацује
H_0 је истинита	Исправна одлука вероватноћа је $1-\alpha$	Грешка **I** врсте вероватноћа је α
H_0 је неистинита	Грешка **II** врсте вероватноћа је β	Исправна одлука вероватноћа је $1-\beta$

Таблица 1: Грфички приказ исхода тестирања

грешку прве врсте.
Вероватноћу да смо направили грешку прве врсте називамо **ниво значајности теста** и најчешће узимамо вредност $\alpha = 0,05$.
Вероватноћу да нисмо направили грешку друге врсте називамо **моћ теста** и њу можемо емпиријски оценити следећим постутком:
Посматрајмо пример једног параметарског теста у коме оцењујемо параметар неке расподеле θ чија је функција расподеле позната $\mathrm{F}(\theta)$, да је нулта хипотеза $\theta = \theta_0$ а алтернативна хипотеза да је $\theta \neq \theta_0$ и да је критична област дата у облику $W = \{|T| > c\}$.

1. Први корак је да одредимо константу c под претпоставком да важи нулта хиптоеза.
   За почетак генеришемо низ тест статистика $[T_0]$ дужине n:

   ```
   for(i in 1:n)
   {
   uzorak = sample(1, F(θ_0))
   T_0[i] = t(uzorak) // тест статистика се добија применом функције t
   }
   ```

   На основу добијеног низа $[T_0]$ може се одредити расподела тест статистика под нултом хипотезом σ

2. Сада тражимо c тако да важи: $P\{|T| > c\} = \alpha$ односно $\sigma(c) = 1 - \alpha$.
   Када смо одредили c под нултом хипотезом занима нас колико пута ће T упасти у критичну област ако не важи нулта хипотеза(ако упадне пуно пута онда је алтернативна хипотеза нетачна, тј. нулта је тачна и обрнуто)

3. Поново генеришемо низ $[T]$ дужине n и примењујемо сличан поступак:

   ```
   for(i in 1:n)
   {
   uzorak = sample(1, F(θ_1))
   T[i] = t(uzorak)
   }
   ```

   Вероватноћу β да смо прихатили нетачну хипотезу рачунамо као количних броја оних тест статистика низа $[T]$ које нису упале у критичну област, тј. оних које су нетачне(јер све радимо под алтернативном хипотезом у овом случају) а ипак смо их прихатили јер не припадају критичној области ,па моћ теста рачунамо као $1 - \beta$.

3 Класични тестови сагласности са расподелом

Када се говори о непараметарским тестовима прво је потребно споменути класичне тестове у које спадају Колмогоров-Смирнов тест, Андерсон-Дарлинг тест и Крамер-фон-Мизесов тест као његов специјални случај, који се заснивају на емпиријској функцији расподеле и следећој теореми:

3.1 Гливенко-Кантелијева теорема

Дефиниција 3.1.1. *Нека је за дати прост случајан узорак $X_1, X_2, \dots, X_n$ дата његова статистика поретка $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ (низ у коме су ове случајне величине сортиране у растућем поретку).*

Емпиријска функција расподеле ових случајних величина дефинише се као

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \dfrac{k}{n} & X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)}, \leq k \leq n-1 \\ 1 & x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

Теорема 3.1.1 (Гливенко-Кантели)**.** *Ако је $F(x)$ функција расподеле случајне величине X и S_n њена емпиријска функција расподеле добијена из простог случајног узорка $X_1, X_2...X_n$ тада је*

$$P(\sup_{x \in R} |S_n(x) - F(x)| \ \to 0, \ n \to +\infty) = 1$$

Ова теорема се назива и централна теорема статистике и њен смисао је да, ако имамо довољно велики узорак, вредности емприријске и теоријске фунције расподеле су готово једнаке.
У пракси је, међутим, немогуће да имамо бесконачно велике узорке, али се испоставља да се и за много мање узорке теоријска функција расподеле може оценити емпријском и ово предстаља основу за конструкцију бројних тестова сагласности са расподелом.

3.2 Примери класичних тестова

У овом поглављу навешћемо примере основних непараметарских тестова сагласности са расподелом за просту хипотезу, а потом ћемо објаснити шта се дешава у случају сложене хипотезе, али за почетак, дефинишимо прво шта су нам нулта и алтернативна хипотеза:

$$H_0 : X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

при чему је λ познат параметар.

$$H_1 : X \sim \mathcal{R}, \mathcal{R} \neq \mathcal{E}$$

3.2.1 Колмогоров-Смирнов тест

Ово је пример теста који је заснован на Гливенко-Кантелијевој теореми. Тест статистика која се користи је врло интуиутивна и природна. Идеја је да се за узорак обима n посматра супремум скупа разлика теоријске и емпиријске функције расподеле и на тај начин се добија следећа тест статистика:

$$T_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

Према Гливенко-Кантелијевој теореми вредности F_n и F_0 треба да буду блиске, тако да је вредност тест статистике, под нултом хипотезом, мала. Дакле критичну област бирамо у облику $W = \{|T_n| > c\}$
Посматрајмо шта се дешава када желимо да тестирамо да ли нека случајна величина има експоненцијалну расподелу.
Тада тест статистика има облик

$$T_n = \sup_x |F_n - (1 - e^{-\lambda x})|$$

Оно што је занимљиво да урадимо да урадимо јесте да симулацијама оценимо моћ овог теста за ниво значајности $\alpha = 0.05$. У следеће две табеле дати су резултати добијени за обим узорка редом $n = 20$ и $n = 50$ и 10 000 понављања.

Предности и ограничења KS теста
Предности

1. Расподела тест статистике не зависи од теоријске функције расподеле коју тестирамо, што ћемо и доказати.

   Доказ. Уведимо смену $y = F_0(x) \iff F_0^{-1}(y) = x$ за $0 \leq y \leq 1$ и запишимо шта је функција расподеле по дефиницији

$$F(t) = P\{\sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \leq t\} = P\{\sup_{0 \leq y \leq 1} |F_n(F^{-1}(y)) - y| \leq t\}$$

Алтернативна расподела	$n = 20$	$n = 50$
Gamma(2,1)	42	83
Gamma(4,1)	96	100
Weibull(1.4)	29	65
Unif(0,1)	53	92
HalfNorm	18	79

Таблица 2: Оцене моћи Колмогоров-Смирнов теста за 10 000 Монте-Карло понављања

Даље, по дефиницији емпиријске функције расподеле можемо написати:

$$F_n(F_0^{-1}(y)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{I}(X_i \leq F^{-1}(y)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{I}(F(X_i) \leq y)$$

Па је онда

$$P\{\sup_{0\leq y\leq 1}|F_n(F^{-1}(y)) \leq y| \leq 1\} = P\{\sup_{0\leq y\leq 1}|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{I}(F(X_i) \leq y) - y| \leq t\}$$

Такође важи да $F(X_i)$ има униформну расподелу на $[0,1]$ зато што је њена функција расподеле дата са:

$$P\{F(X_i) \leq t\} = P\{X_i \leq F_0^{-1}(t)\} = F_0(F_0^{-1}(t)) = t$$

тако да је:

$$P\{\sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \leq t\} = P\{\sup_{0\leq y\leq 1}|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{I}(\mathcal{U}_i) - y| \leq t\}$$

што очигледно не зависи од F_0

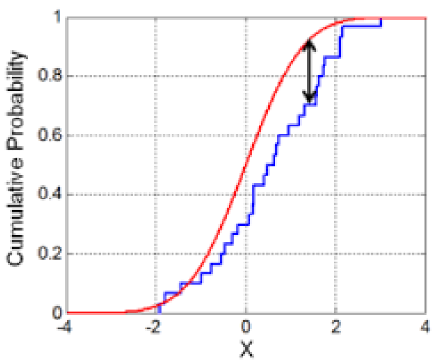
2. За разлику од, рецимо, Хи-квадрат теста Колмогоров-Смирнов се може примењивати на разне обиме узорка, односно не постоји одређена вредност обима узорка за коју је он валидан.

Ограничења

1. Може се примењивати искључиво за тестирање апсолутно непрекидних случајних величина.

2. Боље детектује одступања на средини носача него на крајевима.

3. Функција расподеле коју тестирамо мора бити у потпуности одређена, што значи да домен, сви параметри и критична област морају бити унапред дефинисани (ово се може урадити симулацијама, поступком описаним у претходном поглављу).



Шематски приказ KS теста

Алтернативна расподела	$n = 20$	$n = 50$
Gamma(2,1)	44	91
Gamma(4,1)	99	100
Weibull(1.4)	31	73
Unif(0,1)	63	98
HalfNorm	20	44

Таблица 3: Оцене моћи Андерсон-Дарлинг теста за 10 000 Монте-Карло понављања

Алтернативна расподела	$n = 20$	$n = 50$
Gamma(2,1)	48	91
Gamma(4,1)	99	100
Weibull(1.4)	35	74
Unif(0,1)	68	98
HalfNorm	21	48

Таблица 4: Оцене моћи Крамер-фон-Мизесовог теста за 10 000 Монте-Карло понављања

3.2.2 Андрерсон-Дарлинг тест

Још један тест који је заснован на емпиријској функцији расподеле јесте тест Андерсона и Дарлинга, чија је тест статистика:

$$A^2 = n\int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 \omega(x) dF_0(x)$$

где је ω тежинска функција. У случају када тежинска функција не фигурише у тест статистици добијамо Крамер-фон-Мизесов тест.
Предности и ограничења AD теста
С обзиром на то да Андеросон-Дарлинг тест представља модификацију Колмогоров-Смирнов теста предности које је имао тест су свакако задржане. Оно што је побољшано је то да је тест осетљив и на крајевима расподеле а не само на средини, али оно што остаје као ограничење је то да и за овај тест морамо врло прецизно дефинисати расподелу коју тестирамо, као и критичну Монте-Карло понављања област.

У следећој табели дате су оцене моћи Андерсон-Дарлинг теста за $n = 20$ и $n = 50$ и 10 000 понављања.

3.2.3 Крамер-фон-Мизесов тест

Још један класичан тест, заснован на емпиријској функцији расподеле јесте Крамер-фон-Мизесов тест који је специјалан случај Андерсон-Дарлиноговог теста.У овом тесту не фигурише тежинска функција и он користи тест-статистику:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x)$$

Оцене моћи овог теста дате су у следећој табели
Заједничка анализа Нагласимо да је све горе наведено важило у случају просте хипотезе. У случају сложене хипотезе прво је неопходно да оценимо параметре расподеле.
На основу датих оцена моћи можемо да закључимо да Колмогоров-Смирнов тест има најмању моћ док Андерсон-Дарлинг и Крамер-фон-Мизесов тест имају сличне моћи, што је, приметимо, потпуно очекивано обзиром на то да тест AD предтавља побољшану верзију KS теста.

4 Тестови засновани на емпиријској момент генераторној функцији

4.1 $\mathcal{M}$ и $\mathcal{LM}$ класе расподела као алтернативе

Даћемо пример једног теста експоненцијалности који се заснива на момент генераторним функцијама експоненцијалне расподеле са једне стране, и алтернатива које припадају $\mathcal{M}$ и $\mathcal{LM}$ класи расподела са друге стране, али пре тога рећи ћемо нешто о овим класама расподела, а потом дати и њихову формалну дефиницију.

Ове класе расподела уведене су као подршка статистичким дисциплинама као што су теорија преживљавања, која се бави анализом времена протеклог до неког догађаја као што је пад механичког система или смрт живих организама, и теорија поузданости која се бави могућностима да одређени систем функционише у датим условима без изненадних прекида. За обе дисциплине потребан је одговарајући математички модел који би верно симулирао, трајање живота, објекта у датом експерименту. Примери расподела из $\mathcal{M}$ класе су инверзна нормална расподела $IG(\mu, \lambda)$ са функцијом густине

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2x\mu^2}},$$

очекивањем μ и дисперзијом $\dfrac{\mu^3}{\lambda}$.
Још један пример расподеле из обе класе је Бирнбаум-Саундерсова расподела $BS(\gamma, \delta)$ чија је функција густине

$$f(x) = \frac{e^{\gamma^{-2}}}{2\gamma\sqrt{2\pi\delta}} x^{\frac{-3}{2}} (x+\delta) e^{\frac{(\frac{x}{\delta}+\frac{\delta}{x})}{-2\gamma^2}},$$

математичко очекивање $\delta\left(1+\dfrac{\gamma^2}{2}\right)$ и дисперзија $\delta^2\gamma^2\left(\dfrac{5\gamma^2}{4}+1\right)$
Примери расподела из класе су Гама расподела $\gamma(\alpha, \beta)$ са функцијом густине

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \text{ за } x \geq 0$$

са очекивањем $\dfrac{\alpha}{\beta}$ и дисперзијом $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$.
као и Вејбулова расподела

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{\left(\frac{-x}{\lambda}\right)^k}$$

са очекивањем $\lambda\Gamma\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ и дисперзијом $\lambda^2\left[\Gamma\left(1+\dfrac{2}{k}\right)-\left(\Gamma\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right)^2\right]$.
Прво ћемо дефинисати нулту и алтернативну хипотезу:

$$H_0 : X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$H1 : X \sim \mathcal{M} \vee X \sim \mathcal{LM}$$

Момент генераторна функција $M_(t)$ сличајне величине $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ са функцијом густине $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ је:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tX} dt = \int_0^\infty \lambda e^{x(t-\lambda)} dt = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{x(t-\lambda)} \Big|_0^{+\infty}$$

Дати интеграл конвергира за $t < \lambda$ и тада је једнак $\dfrac{1}{1-\lambda t}$.

Дефиниција 4.1.1. *Ненегативна случајна величина X са $\mu = E(X) > 0$ и функцијом расподеле F припада класи $\mathcal{M}$ ако важи:*

$$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tX} d(F(x)) \leq \frac{1}{1-\mu t}$$

Дефиниција 4.1.2. *Ненегативна случајна величина X са $\mu = E(X) > 0$ и функцијом расподеле F припада класи $\mathcal{L}$ ако важи:*

$$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tX} d(F(x)) \leq \frac{1}{1+\mu t}$$

Дефиниција 4.1.3. *Ненегативна случајна величина X са $\mu = E(X) > 0$ и функцијом расподеле F припада класи $\mathcal{LM}$ ако припада и $\mathcal{M}$ класи и $\mathcal{L}$ класи:*

Емпиријску MGF случајне величине чију експоненцијалност испитујемо рачунамо као

$$M_n(t) = \frac{1}{n}\sum_i e^{tX_i}$$

Дакле тест статистику када за алтернативу узимамо расподелу из $\mathcal{M}$ класе бирамо као:

$$T_n = \overline{X}_n \int_0^{\frac{a}{\overline{X}_n}} (M_n(t) - M(t))dt$$

$$T_n = \overline{X}_n(\int_0^{\frac{a}{\overline{X}_n}} \frac{1}{n}\sum_i e^{tX_i}dt - \int_0^{\frac{a}{\overline{X}_n}} \frac{1}{1-\mu t}dt)$$

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_j \frac{e^{aY_j}-1}{Y_j} + ln(1-a)$$

при чему је $Y_j = \frac{X_j}{\overline{X}_n}$
Када за алтернативу узимамо расподелу из $\mathcal{LM}$ класе онда тест статистику бирамо као

$$\widetilde{T_n} = \overline{X}_n \int_{a-\overline{X}_n}^{a+\overline{X}_n} (M_n(t) - M(t))dt$$

$$\widetilde{T_n} = \frac{1}{n}\sum_j \frac{e^{aY_j}-e^{-aY_j}}{Y_j} - ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$$

Примедба: Пошто се може десити да случајна величина Y_j узме вредност 0, тада ћемо $\dfrac{e^{aY_j}-1}{Y_j}$ и $\dfrac{e^{aY_j}-e^{-aY_j}}{Y_j}$ заменити одговарајућим граничним вредностима a односно $2a$.

Гранична расподела ове тест статистике

Размотримо расподелу тест статистике T_n када $a \to 0$ тако што ћемо
$(\frac{2T_n}{a^3} + \frac{1}{3})$ развити у Тејлоров ред.

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{T_n}{a^3} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{aY_j}-1}{Y_j} + \frac{ln(1-a)}{a^3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_j\left(\frac{1}{a^2} + \frac{Y_j}{2a} + \frac{{Y_j}^2}{6} + o(a)\right) - \frac{1}{a^3}\left(a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + o(a^4)\right) + \frac{1}{3}\right)$$

Приметимо да важи

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j}{2a} = \frac{1}{n}\frac{n}{2a} = \frac{1}{2a}$$

па се након скраћивања добија да је тражена гранична вредност $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{{Y_j}^2}{6}$
Слично је и за другу тест статистику.
Следеће теореме дају нам граничну расподелу тест статистика T_n , $\widetilde{T_n}$ за $0 \le a \le 0.5$

Теорема 4.1.1. *Нека је дат прост случајан узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативних случајних величина за које важи $E(e^{cX}) < \infty$ за $c < 1$. Када $n \to \infty$*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{aY_j}-1}{Y_j} - E(\frac{e^{aX}-1}{X})\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

где је

$$\sigma^2 = E\left(k_1(X-1) + \frac{e^{aX}-1}{X} - \mu_1\right)$$

n	$a = 0.1$	$a = 1$	$a = 50$
10	-1.55	-1.67	-1.44
20	-1.60	-1.68	-1.51
50	-1.63	-1.68	-1.58
100	-1.64	-1.66	-1.60
200	-1.63	-1.66	-1.62

Таблица 5: Вредности T_n за ниво значајности теста $\alpha = 0.05$ и 10000 понављања

n	$a = 0.1$	$a = 1$	$a = 5$
10	-1.33	-1.68	-1.46
20	-1.48	-1.69	-1.53
50	-1.55	-1.68	-1.59
100	-1.59	-1.67	-1.62
200	-1.61	-1.67	-1.63

Таблица 6: Вредности $\widetilde{T_n}*$ за ниво значајности теста $\alpha = 0.05$ и 10000 понављања

$$k_1 = E\left(\frac{(1-aX)e^{aX}-1}{X}\right)$$

$$\mu_1 = E\left(\frac{e^{aX}-1}{X}\right)$$

Под нултом хипотезом имамо $\sqrt{n}T_n \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ *где је*

$$\sigma_0^2 = (1-2a)ln(1-2a) - 2(1-a+\frac{a}{1-a})ln(1-a) - 2(ln(1-a))^2 - \frac{a^2}{(1-a)^2}$$

Теорема 4.1.2. *Нека је дат прост случајан узорак* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ненегативних случајних величина за које важи* $E(e^{cX}) < \infty$ *за* $c < 1$ *. Када* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{aY_j} - ^{-aY_j}}{Y_j} - \mu_2\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

где је

$$\sigma^2 = E\left(k_2(X-1) + \frac{e^{aX}-e^{-aX}}{X} - \mu_2\right)^2$$

,

$$\mu_2 = E\left(\frac{e^{aX}-e^{-aX}}{X}\right)$$

,

$$k_2 = E\left(\frac{(1-aX)e^{aX}-(1+aX)e^{-aX}}{X}\right)$$

Под нултом хипотезом имамо $\sqrt{n}\widetilde{T_n} \longrightarrow \mathcal{N}(0, \widetilde{\sigma_0^2})$ *где је*

$$\widetilde{\sigma_0}^2 = \frac{4a}{1-a^2}ln\frac{1+a}{1-a} - 2\left(ln\frac{1+a}{1-a}\right)^2 - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} + (1-2a)ln(1-2a) + (1+2a)ln(1+2a)$$

Ове граничне расподеле изведене су у Кларовом раду, и наводимо их без доказа јер је доказ изузетно комплексан.

Симулације У следеће 4 табеле дате су критичне вредности скалираних тест статистика T_n^* , $\widetilde{T_n^*}$ у зависности од параметра а као и ниво значајности теста.

n	$a = 0.1$	$a = 1$	$a = 5$
10	-1.34	-1.41	-1.26
20	-1.34	-1.39	-1.29
50	-1.32	-1.36	-1.31
100	-1.30	-1.35	-1.31
200	-1.31	-1.32	-1.30

Таблица 7: Вредности T_n за ниво значајности теста $\alpha = 0.10$ и 10000 понављања

n	$a = 0.1$	$a = 1$	$a = 50$
10	-1.20	-1.43	-1.27
20	-1.27	-1.39	-1.30
50	-1.29	-1.36	-1.31
100	-1.29	-1.34	-1.32
200	-1.28	-1.32	-1.30

Таблица 8: Вредности $\widetilde{T_n}*$ за ниво значајности теста $\alpha = 0.10$ и 10000 понављања

Анализа теста Главни закључци које можемо извести о овом тесту су следећи

1. Тест стастике се понашају слично и моћ теста у малој мери зависи од вредности параметра a.
2. За све расоделе које су коришћене као алтернативе моћ теста опада са порастом параметра a.
3. Осим у случајевима када су као алтернативе коришћене гама и Вејбулова и расподела чак и са великим повећањем обима узорка моћ теста се не промени значајно.

4.2 $\mathcal{L}$ класа раподела као алтернатива

Овај тест заснива се на коришћењу Лапласових трансоформација датог узорка $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Пре него што објаснимо основе овог теста, даћемо формалну дефиницију Лапласових трансформација:

Дефиниција 4.2.1. *Лапласова трансформација функције $f(x)$ за свако ненегативно x је фунција $F(x)$ за коју важи:*

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$$

где је s комплексан број,у општем случају, који се назива параметар учесталости.

Дефинишимо следећу функцију:

$$L_n(t) = \int_0^\infty e^{-tX}dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tX_i}$$

Дакле за нулту хипотезу узимамо:

$$H_0 : X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

а за алтернативу:

$$H_1 : X \sim Ł$$

Тест статистику бирамо као:

$$T_n = \overline{X}_n \int_0^\infty (L_n(t) - L(t))e^{-at\overline{X}_n}dt$$

n	$a = 0.1$	$a = 1$	$a = 50$
10	-1.55	-1.67	-1.44
20	-1.60	-1.68	-1.51
50	-1.63	-1.68	-1.58
100	-1.64	-1.66	-1.60
200	-1.63	-1.66	-1.62

Таблица 9: Вредности T_n за ниво значајности теста $\alpha = 0.05$ и 10000 понављања

a	$T^*_{n,a}$						$T^*_{n,a}$					
	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
$Exp(1)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$W(1.3)$	41	45	44	42	43	42	45	44	46	44	44	45
$W(1.5)$	76	77	78	77	76	75	78	80	79	78	77	78
$W(1.7)$	95	95	93	95	94	93	96	97	95	96	94	95
$\Gamma(1.5)$	36	34	33	33	33	31	33	35	32	34	33	34
$\Gamma(2.0)$	72	69	69	68	68	64	70	71	71	68	69	569
$\Gamma(3.0)$	92	90	88	83	82	80	87	91	89	85	82	80
$LFR(0.5)$	26	25	25	26	25	25	25	26	25	25	25	26
$LFR(2.0)$	21	25	27	29	31	30	18	24	27	28	29	28
$LFR(5.0)$	32	40	42	43	43	44	23	35	42	43	43	44
$IG(1.2)$	49	32	26	20	18	17	57	39	29	20	18	17
$IG(1.5)$	65	47	38	30	28	26	73	54	42	31	28	25
$IG(2.0)$	84	68	59	48	45	42	89	75	63	49	45	41
$IG(3.0)$	97	90	83	73	70	67	99	93	87	75	71	67
$BS(1.2)$	19	25	29	28	29	29	15	23	26	28	29	28
$BS(1)$	43	53	56	56	56	56	36	50	55	56	57	56
$BS(\sqrt{2/3})$	66	74	76	76	76	75	58	72	74	76	76	75
$BS(0.7)$	81	87	87	87	86	85	75	88	87	87	87	86

Таблица 10: Оцена моћи теста за 10 000 Монте-Карло понављања, обим узорка $n = 30$, и ниво значајности $\alpha = 0.05$

Пошто је $L_n(t) - L(t) \leq 0$ нулту хипотезу одбацујемо за негативне, велике по апсолутној вредности, вредности тест статистике.
Коришћењем формуле: $\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{1+t}dt = e^a E_1(a)$ при чему је $E_1(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$ експоненцијални интеграл, који се не може записати преко елементарних функција и дефинисањем случајне величине Y као $Y_i = \frac{X_i}{\overline{X}_n}$ добијамо да тест статистику можемо записати као:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{Y_j + a} - e^a E_1(a)$$

Такође, можемо дефинисати и другу класу тест статистика:

$$\widetilde{T_n} = \overline{X}_n \int_0^\infty (L_n(t) - L(t))(1 + t\overline{X}_n)e^{-at\overline{X}_n}dt =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{Y_j + a} + \frac{1}{(Y_j + a)^2} - \frac{1}{a}$$

Приметимо да је једина разлика између тест статистика T_n и $\widetilde{T_n}$ у њиховим тежинским функцијама које су редом $\overline{X}_n e^{-at\overline{X}_n}$ и $\overline{X}_n e^{-at\overline{X}_n}(1 + t\overline{X}_n)$
Расподелу тест статистике T_n када $a \to \infty$ дајемо без ивођења

$$\lim_{a\to\infty} a^3 T_n = \lim_{a\to\infty} a^3 \widetilde{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {Y_j}^2 - 2$$

Следеће 2 теореме дају нам граничне расподеле ових тест статистика за било које позитивно а

Теорема 4.2.1. *Нека је дат случајан узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$, при чему је X случајна величина са коначним другим моментом.Када $n \to \infty$ важи:*

$$\sqrt{n}(T_n - E(T_n)) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

где је

$$\sigma^2 = E(k_1(X - 1) + \frac{1}{X + a} - \mu_1)^2$$

и

$$k_1 = E\left[\frac{X}{X + a}\right], \mu_1 = E\left[\frac{1}{X + a}\right]$$

Алтернативна расподела	$T^*_{n,a}$						$T^*_{n,a}$					
	0.1	0.5	1.0	3.0	5.0	10.0	0.1	0.5	1.0	3.0	5.0	10.0
$Exp(1)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$W(1.2, 1)$	23	25	22	19	21	21	21	23	23	23	22	21
$W(1.5, 1)$	62	68	70	64	65	63	55	66	67	65	64	62
$W(1.8, 1)$	89	94	93	93	92	92	84	91	94	93	92	91
$\Gamma(1.5, 1)$	35	33	31	27	28	28	32	34	33	29	28	27
$\Gamma(2.0, 1)$	70	68	65	60	59	57	63	68	67	61	59	57
$\Gamma(2.5, 1)$	91	90	88	83	82	80	87	91	89	84	82	80
$LFR(0.5)$	12	17	18	19	19	19	14	18	17	18	18	19
$LFR(1.0)$	21	26	27	29	29	30	18	24	27	28	29	29
$LFR(2.0)$	32	39	42	43	43	44	26	37	41	43	43	43
$LFR(3.0)$	38	49	51	53	53	54	32	45	50	53	53	53
$IG(1, 1.0)$	49	32	26	20	18	17	57	39	29	20	18	17
$IG(1, 1.2)$	65	47	38	30	28	26	73	54	42	31	28	25
$IG(1, 1.5)$	84	68	61	50	45	42	89	72	64	49	44	39
$IG(1, 2.0)$	97	93	83	73	70	67	99	96	87	76	74	67
$Par(0.25)$	19	25	27	28	29	29	15	23	26	29	29	27
$Par(0.50)$	42	53	57	56	56	56	36	50	54	56	56	57
$Par(0.75)$	65	73	76	76	76	75	58	72	76	76	75	75
$Par(1.00)$	80	87	87	87	89	85	75	86	86	87	87	85

Таблица 11: Оцена моћи за наведене алтернативе

под нултом хипотезом је

$$\sqrt{n}T_n \to \mathcal{N}(0, {\sigma_0}^2),$$

где је

$$ {\sigma_0}^2 = (2a+1)e^a E1(a) - (a^2+2a+2)e^2 a E_1(a)^2 + \frac{1-a}{a}$$

Теорема 4.2.2. *Нека је дат случајан узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$, при чему је X случајна величина са коначним другим моментом.Када $n \to \infty$ важи:*

$$\sqrt{n}(\widetilde{T_n} - E(\widetilde{T_n})) \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\sigma}^2)$$

где је

$$\widetilde{\sigma}^2 = E\left(\frac{1}{X+a} - \mu_1 + \frac{1}{(X+a)^2} - \mu_2 + (X-1)(k_1+k_2)\right)^2$$

при чему су k_1, μ_1 дефинисани као у претходној теореми а

$$\mu_2 = E\left[\frac{1}{(X+a)^2}\right], k_2 = 2E\left[\frac{X}{(X+a)^3}\right]$$

под нултом хипотезом је

$$\sqrt{n}T_n \to \mathcal{N}(0, \widetilde{\sigma_0}^2),$$

где је

$$\widetilde{\sigma_0}^2 = (\frac{2}{a} - \frac{1}{6})e^a E_1(a) - e^{2a}E_1(a)^2 + \frac{a^2-7a+2}{6a^2}$$

Симулације У овом делу рада даћемо емпиријску оцену моћи овог теста Монте-Карло методом за обим узорка $n = 20$ и 10000 понављања. Нагласимо само да су за тест статистике коршћене скалиране полазне тест статистике добијене из теорема 4.2.1. и 4.2.2.

Анализа теста Главни закључци које можемо извести из приказаних табела су следећи

1. Тестови засновани на тест-статистикама $T_n, \widetilde{T_n}$ се понашају слично а моћи ових тестова у одређеној мери зависе од параметра а.Такође обе тест статистике дају највећу моћ теста када за алтернативе узмемо расподеле $IG(1, 2.0), \Gamma(2.5, 1), W(1.8, 1)$,а најмању моћ када за алтернативе узмемо $LFR, W(1.2, 1), \Gamma(1.5, 1)$ расподеле

2. У случају када је алтернатива LFR расподела моћ теста расте са повећањем параметра док у случају инверзне нормалне расподеле моћ опада са повећањем параметра.

3. Ако ништа није познато о класи алтернатива, коришћење овог теста свакако јесте препоручљиво обзиром на то да показује солидну моћ код великог броја алтернатива.

5 Нова класа тестова

У последње време веома су популарни тестови засновани на каратеризацијама одређених расподела. Неки од оваквих тестова експоненцијалности дати су у радовима наведеним у литератури.

Мотивација
Идеја је да се састави тест који би тестирао да ли одређена случајна величина има експоненцијалну расподелу, коришћењем познате Десусове карактеризације:

Теорема 5.0.1. *Ако су X, Y случајне величине које су независне и једнако расподељене, важи да X има исту расподелу као и $2\min(X,Y)$ акко $\mathcal{E}(\lambda)$.*

Доказ. Даћемо доказ у оба смера:
$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \implies X \stackrel{d}{=} 2\min(X,Y)$

Нека је $2\min(X,Y) = Z$

$$\begin{aligned} F_Z(t) = P\{Z \leq t\} = P\{2\min(X,Y) \leq t\} = \\ = P\{X \leq \frac{t}{2}\}P\{Y \leq \frac{t}{2}\} = \\ = (1 - e^{-\lambda\frac{x}{2}})^2 = \\ = 1 - e^{-\lambda x} \\ \implies 2\min(X,Y) \stackrel{d}{=} X \end{aligned}$$

Други смер је компликованији:

Нека је F диференцијабилна функција (самим тим и непрекидна) на $\mathbb{R}$. Тада, према претходном смеру, мора да важи следећа функционална једначина

$$F(x) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

$$F(x) = 1 - 1 + 2F\left(\frac{x}{2}\right) - F^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$F(x) = 2F\left(\frac{x}{2}\right) - F^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$F(2x) = 2F(x) - (F(x))^2$$

Пошто је F функција расподеле морају да важе следећи услови

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. F је неопадајућа

Онда можемо записати $F(x) = 1 - G(x)$ при чему важи:

1. G је неопадајућа
2. G је диференцијабилна, самим тим и непрекидна

Даљим решавањем добијамо

$$1 - G(2x) = 2(1 - G(x)) - (1 - G(x))^2$$

$$1 - G(2x) = 2 - 2G(x) - 1 + 2G(x) - (G(x))^2$$

$$G(2x) = (G(x))^2$$

$$G(0) = (G(0))^2 \implies G(0) = 1 \vee G(0) = 0$$

$$1)G(0) = 1 \implies F(0) = 0$$

Пошто је F неопадајућа и $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ онда закључујемо $F(x) = 0, x \leq 0$ Како је G нерастућа и непрекидна (F је неопадајућа и непрекидна), $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \implies \lim_{x\to\infty} G(x) = 0$

$$H(x) = (G(x))^{\frac{1}{x}}$$

$$G(2x) = (H(2x))^{2x}, G(x) = (H(x))^{x}$$

$$\implies (H(2x))^{2x} = (H(x))^{2x}$$

$$\implies H(2x) = H(x)$$

$$H(x) = H\left(\frac{2}{x^n}\right) \implies H(0) = const = C$$

$$\implies H(x) = C \implies G(x) = C^x$$

Случај $G(0) = 0$ ради се веома слично, па ћемо то овом приликом изоставити. $\square$

Сада када смо доказали ову карактеризацију са креирање теста користићемо једнакост момент-генераторних функција ових случајних величина.
Нека је дат прост случајан узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тада су:

$$M_1(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tX_i}$$

$$M_2(t) = \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j} e^{2min(X_i,X_j)t}$$

Са једне стране свакако би имало смисла узети да је тест статистика супремум ових разлика, међутим оно што би такође могли да урадимо јесте да за тест статистику одаберемо интеграл ових разлика (интегралимо по t за које се испоставља да мора узимати вредности из интервала $(0, a)$ где је a неки број мањи од 0.5 да би тест био добар). Онда добијамо:

$$\int_0^{a\lambda}(M_1(t) - M_2(t))dt \int_0^{a\lambda}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tX_i} - \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j} e^{t2min(X_i,X_j)})dt$$

$$\frac{1}{n}\sum_i \frac{1}{X}_i(e^{aX_i\lambda} - 1) - \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j}\frac{e^{a\lambda 2min(X_i,X_j)} - 1}{2min(X_i,X_j)}$$

$$\frac{1}{n}\sum_i \frac{1}{X_i}(e^{aX_i\lambda} - 1) - \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j}\frac{e^{a\lambda 2min(X_i,X_j)} - 1}{2min(X_i,X_j)}$$

Пошто је очекивање случајне величине X са параметром λ једнако $\frac{1}{\lambda}$ онда тај параметар можемо,методом момената, оценити са $\frac{1}{X_{sr}}$. Такође је битно напоменути да се иста оцена овог параметра добија и методом максималне веродостојности.
Дакле добијамо

$$\frac{1}{n}\sum_i \frac{1}{X}_i(e^{aX_i\lambda} - 1) - \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j}\frac{e^{a\lambda 2min(X_i,X_j)} - 1}{2min(X_i,X_j)}$$

Међутим, пошто желимо да избегнемо да нам тест-статистика зависи од параметра, а једино што зависи од параметра су имениоци ове две суме, има смисла помножити све са $\frac{1}{X_{sr}}$ и тако добијамо финалну тест статистику која неће зависити од параметра

$$B = X_{sr}\left(\frac{1}{n}\sum_i \frac{(e^{aX_i\lambda} - 1)}{X_i} - \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j}\frac{e^{a\lambda 2min(X_i,X_j)} - 1}{2min(X_i,X_j)}\right)$$

<u>Напомена:</u> Може се показати да $\sqrt{n}B$ има нормалну расподелу, али то ће бити предмет даљих истраживања. Оцене моћи датог теста за $n = 20$ и $n = 50$ дате су у следећим табелама

	$a = 0.1$	$a = 0.2$	$a = 0.4$
Gamma(2,1)	0.5519	0.5501	0.5296
Gamma(4,1)	0.9942	0.9897	0.9888
Weibull(1.4)	0.4684	0.4426	0.4432
Unif(0,1)	0.8102	0.8312	0.8817
HalfNorm	0.3177	0.3244	0.3256

Таблица 12: Оцене моћи теста за $n = 20$

	$a = 0.1$	$a = 0.2$	$a = 0.4$
Gamma(2,1)	0.5519	0.5501	0.5296
Gamma(4,1)	0.9942	0.9897	0.9888
Weibull(1.4)	0.8101	0.8221	0.9984
Unif(0,1)	0.9964	0.9977	0.9999
HalfNorm	0.6541	0.6297	0.6329

Таблица 13: Оцене моћи теста за $n = 50$

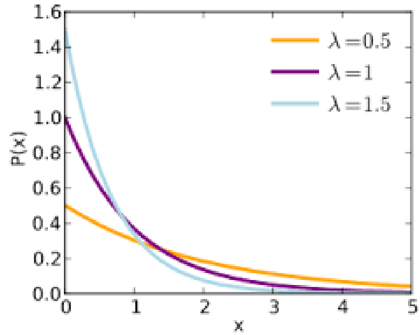
Анализа теста Оно што је потпуно јасно јесте да ће моћ теста зависити од тога коју расподелу узимамо за алтернативу, и да моћ теста може доста да се промени зависно од одабира алтернативе. Иако моћ теста јесте способност да добро одбацује нетачне хипотезе морамо имати на уму на нису све алтернативне хипотезе подједнако нетачне. Наиме, када тестирамо да ли нека случајна величина има експоненцијалну расподелу, постоје расподеле које више одступају од ње и оне које мање одступају. Чак ни то није довољно прецизно речено, зато што мера одупања може зависити и од параметара те расподеле.

Примера ради, у овом раду кориђене су две гама расподеле као алтернативе. Знамо да је експоненцијална расподела специјалан случај гама расподеле када је $\alpha = 1$, па је онда јасно да ће наша тест статистика у случају коришћења расподеле $\gamma(4, 1)$ више пута упасти у критичну област него у случају $\gamma(2, 1)$ расподеле јер расподела више одступа од експоненцијалне што резултати нашег теста и потврђују.

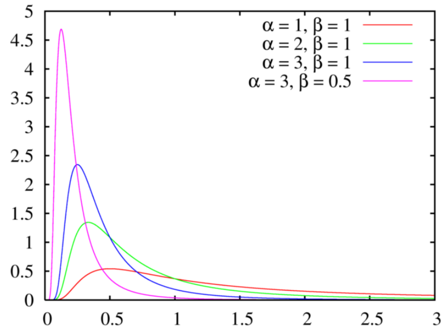
На осову резултата теста видимо да униформна расподела убедљиво највише одступа од екпоненцијалне, што је природно, јер се функција густине униформне расподеле, од свих горенаведених, једина константна, као и то да полу-нормална расподела (дефинисана за $x \geq 0$) не одступа претерано од експоненцијалне. Такође је интересантно прокоментарисати да се у случају коришћења баш експоненцијалне расподеле као алтернативе, добија моћ теста која је баш 0.95 што је 1 - ниво значајности теста који смо унапред задали. Наиме, када су нулта и алтернативна хипотеза исте онда је прихватање нетачне хипотезе исто што и одбацивање тачне па је вероватноћа да смо одбацили нетачну хипотезу (моћ теста) једнака $1 - P\{$да смо одбацили тачну$\}$.

Оно што је такође сасвим очекивано јесте да што је већи обим узорка, тест је бољи и прецизнији, односно има већу моћ што се може видети из резултата табеле.

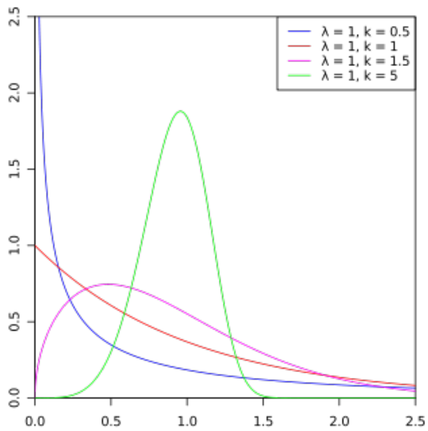
На следећим графицима приказане су функције густине расподела које су коришћене као алтернативе, на основу којих се може видети колико дате алтернативе одступају од експоненцијалне расподеле:



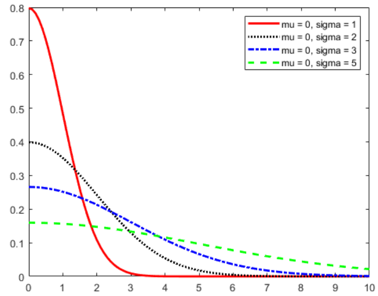
Експоненцијална расподела



Гама расподела



Вејбулова расподела



Полу-нормална расподела

6 Закључак

У овом раду приказани су класични као и новији тестови сагласности са расподелом, и предложена је нова класа тестова заснованих на Десусовој карактеризацији.
Као што се може приметити, у овом раду се првенствено инсистира на суштини ових тестова односно детаљној анализи тога шта је у позадини резултата добијених симулацијама и шта нам ти резултати говоре о тесту, али и расподели са којом тестирамо сагласност, и зашто тестови на баш те приказане начине реагују на дате алтернативе.
У овај рад је уложено пуно труда, времена и воље и зато се надам да ће свако ко узме да га чита уживати бар делимично као ја док сам га радила, као и да ће у њему пронаћи нешто корисно.

Посебну захвалност дугујем својој менторки др Бојани Милошевић на огромној помоћи око израде овог рада као и на томе што је дала све од себе да извуче максимум из мене и научи ме пуно тога. Ово свакако није крај нашег заједничког бављења овом темом.

7 Литература

[1] I. Ahmad, I.Alwasel, *A goodness-of-fit test for exponentiality based on the memoryless property.*

[2] J. E. Angus, *Goodness-of-fit test for exponentiality based on loss of memory type functional equation.*

[3] Y. Y. Nikitin, *Bahadur efficiency of test of exponentiality based on loss of memory type functional equation.*

[4] Y. Y. Nikitin, K. Y. Volkova, *Asymptotic efficiency of exponentiality tests based on order statistics characterization.*

[5] K. Y. Volkova, *On asymptotic efficiency of exponentiality tests based on Rossbergs characterization.*

[6] N. Henze, *A new flexible class of omnibus tests for exponentiality.*

[7] N. Henze, M. G. Meintains, *Tests of fit for exponentiality based on the empirical Laplace transform.*

[8] B. Milošević, M. Obradović, *New class of exponentiality tests based on U-empirical Laplace transform.*

[9] B. Milošević, *Asymptotic Efficiency of New Exponentiality Tests Based on a Characterization.*

[10] M. Jovanović, *Tests of exponentiality based on Arnold-Villasenor characterization, and their efficiencies.*

[11] R. J. Larsen, M. M. Marx, *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications.*

[12] B. Klar, *Tests for exponentiality against the M and LM-Classes of life distributions.*

[13] N. Henze, B. Klar, *Testing exponentiality against the L-class of life distributions.*

[14] J. S. Allison, L. Santana, *On a data-dependent choice of the tuning parameter appearing in certain goodness-of-fit tests.*